Online Journal of Art and Design
volume 13, issue 1, January 2025

Fibonacci Dizisinin Eğitim Hayatımıza Yansımaları

Öznur ÖZKAN KILIÇ
Başkent Üniversitesi, İİBF, Teknoloji ve Bilgi Yönetimi Programı.
oznur@baskent.edu.tr

ÖZET
Fibonacci dizisinin matematik üzerinde önemli bir etkisi olmuştur. Matematiğe yaptığı katkılar, yüzyıllar boyunca insanların ilgisini çekmiştir. Matematik yanında Mimari Sanat ve Müzikte de insanlık tarihinin en başından beri doğadaki etkileyici düzen, gözlem ve sorgulama yetenekleri gelişmiş insanlara ilham kaynağı olmuştur. Her ne kadar günümüzde özelikle mimari, sanat ve müzikle ilgili olarak pek çok örnek verilse de aslında fibonacci dizisi matematik bilimiyle, matematik eğitimiyle ortaya çıkmıştır. Bu çalışmada fibonacci dizisinin nasıl ortaya çıktığı matematiksel denklemlerle tekrar göz önüne getirilmiştir. Matematik eğitiminin hayatımızın her yerinde olduğu vurgulanmıştır. Fibonacci dizisiyle ortaya konan doğadaki ahenkin ve örüntünün tesadüf olmadığı. Bir yaratıcının eseri olduğu vurgulanmıştır.
Anahtar Kelimeler: Fibonacci, Fibonacci dizisi, Liber Abaci, Matematik Eğitimi

ABSTRACT
The Fibonacci sequence has had a significant impact on mathematics. Its contributions to mathematics have attracted the attention of people for centuries. In addition to mathematics, in architecture, art and music, the impressive order in nature has been a source of inspiration for people with developed observation and questioning skills since the beginning of human history. Although many examples are given today, especially in architecture, art and music, the fibonacci sequence has actually emerged with mathematics science and mathematics education. In this study, how the fibonacci sequence emerged was brought to the fore again with mathematical equations. It is emphasised that mathematics education is everywhere in our lives. The harmony and pattern in nature revealed by the Fibonacci sequence is not a coincidence. It is emphasised that it is the work of a creator.
Keywords: Fibonacci, Fibonacci Sequence, Liber Abaci, Maths Education

Fibonacci olarak bilinen matematikçi Pisa'lı Leonardo'nun matematik üzerinde önemli bir etkisi olmuştur. Matematiğe yaptığı katkılar, yüzyıllar boyunca insanların ilgisini çekmiş ve matematik dünyasını daha derinlemesine araştırmaları için onlara ilham vermiştir. Leonardo en çok kendi adını taşıyan sayı dizisiyle tanınır (Anna Grigas, 2013).
On üçüncü yüzyılla birlikte Avrupa, Karanlık Çağ'dan uyanmaya ve Rönesans'a geçmeye başladı. Karanlık Çağ'ın boğucu etkileri yerini bilim dünyasına artan bir ilgiye bırakmaya başladığında, sanatçılar, akademisyenler, mimarlar, bilim insanları ve matematikçilerin hepsi devrim niteliğinde keşifler yapmaya ve bilgi alanında ilerlemeler kaydetmeye başladı. Bu kişilerden biri de o dönemde matematik dünyasının dönüşümüne katkıda bulunan Pisa'lı Leonardo'ydu.

2. HAYATI

Çalışmaları oldukça iyi bilinmesine rağmen, Fibonacci'nin hayatı hakkında şaşırtıcı derecede az şey bilinmektedir. Doğum tarihi ya da yeri kesin olarak bilinmemekle birlikte, 1170 yılı civarında İtalya'nın Pisa kenti yakınlarında doğmuş olduğu tahmin edilmektedir.

Fibonacci ismi "*Bonacci'nin evinden*" anlamına gelir, ancak doğduğu şehre atfen Leonardo Pisano ya da Pisa'lı Leonardo olarak bilinirdi. Babası Guilielmo Bonacci, Pizalı bir tüccar ve gümrük memuruydu. Pisa o dönemde gelişen bir ticaret merkeziydi. (Keith, 2011, s. 27-29). Takma adı Bonaccio idi ve bu ad, *iyi tabiatlı* veya *sade ruhlu* anlamına gelmekteydi. Annesi Alessandra, Leonardo 9 yaşındayken öldü. Leonardo babasının takma adını miras olarak aldı.

İtalyanca *Filius Bonacci*, Bonacci'nin oğlu anlamına gelmekteydi ve Leonardo bu nedenle Fibonacci diye anılmaya başlandı (Keith, 2011, s. 27-29).

Leonardo genç bir delikanlıyken, babası Pisa'yı ve İtalyan tüccarları temsilen kuzey Afrika kıyısında, bugünkü Cezayir'de bulunan Bugia'daki bir gümrükte çalışmak üzere görevlendirildi. Bugia'da güçlü bir Arap varlığı vardı ve Arap matematikçiler, Karanlık Çağ'da sıkışıp kalmış ve yüzlerce yıl boyunca çok az bilimsel ilerleme kaydetmiş olan Avrupalıların bilmediği birçok bilgiyi aktarabiliyorlardı (Henderson, 2007, s. 1-2). Leonardo kısa süre sonra Bugia'da babasına katıldı, burada eğitim gördü ve tüccar olmaya hazırlanırken hesap yapma becerisini öğrendi. Bu iyi bir beceriydi çünkü her cumhuriyetin farklı bir para birimi vardı, bu da para birimleri arasında dönüşüm yapmayı iş görüşmelerini sürdürebilmek için gerekli bir yetenek haline getiriyordu. Leonardo 1-9 Hint rakamlarını ve 0 Arap rakamını ilk kez buradaki eğitimi sırasında öğrenmiştir (Posamentier & Lehmann, 2007, s. 18-19). O dönemde Avrupa'nın çoğu Roma rakamlarını kullanıyordu, ancak Leonardo, Arap tüccarlar tarafından da kullanılan bu yeni numaralandırma sistemini çok daha verimli ve çalışması daha kolay olduğu için tercih etti. Roma rakamlarıyla yapılan hesaplamalar son derece zahmetliydi. Toplama ve çıkarma işlemleri zaman alıyordu, çarpma ve bölme işlemleri ise çok karmaşıktı. Avrupalıların çoğu hesaplamalarını bir abaküsle yapar ve ardından nihai cevabı Roma rakamlarıyla kaydederdi.

Bu yeni Hindu-Arap numaralandırma sistemi sayesinde hesaplamalar çok daha verimli hale gelmiş ve adımlar cevapla birlikte kaydedilebilmiştir. Leonardo'nun Müslüman bir öğretmenin yanında aldığı eğitim sadece klasik Yunan matematiğini değil, aynı zamanda Hintli ve Arap bilginlerin eserlerini de içeriyordu ve cebirle tanışması İranlı bir matematikçinin yazdığı bir kitap sayesinde oldu (Bradley, 2006, s. 118-119).

Leonardo'nun Bugia'daki eğitimi ona matematikte güçlü-sağlam bir altyapı kazandırmış ve hayat boyu tutkusu olacak bu konuya olan ilgisini ateşlemiştir.

3. MATEMATİKSEL ÇALIŞMALAR

Fibonacci hayatı boyunca, Hindu rakamlarının avantajlarını tanıtan ve çeşitli matematik problemlerini tartışan *Liber Abaci*, trigonometri ve ispatları içeren bir geometri kitabı, çiçekler üzerine bir kitap ve son derece yetenekli bir matematikçi olarak tanınmasını sağlayan sayı teorisi üzerine bir kitap da dahil olmak üzere birçok kitap yazdı. Eserleri arasında en çok bilineni, "hesaplama kitabı" veya "Abaküs Kitabı" anlamına gelen *Liber Abaci*'dir. Bu kitap büyük olasılıkla Orta Çağ'ın en etkili matematiksel eserlerinden biriydi. Latince olarak kaleme alınan *Liber Abaci* ilk kez 1202 yılında yayınlanmış ve daha sonra 1228 yılında gözden geçirilmiştir (Posamentier & Lehmann, 2007, s. 19-20). Kitabın ilk yedi bölümü Hindu-Arap rakamlarını tanıtmakta ve bunların çeşitli matematiksel hesaplamalarda nasıl kullanılacağını göstererek verimliliklerini ve kullanım kolaylıklarını ortaya koymaktadır. Fibonacci önce sayıların nasıl okunacağını ve yazılacağını açıklamış, ardından tam sayılar ve kesirler kullanılarak nasıl toplama, çıkarma, çarpma ve bölme yapılacağını göstermiştir. Sonraki dört bölümde bu tekniklerin ve Hindu-Arap numaralandırma sisteminin ticari işlemleri nasıl büyük ölçüde basitleştireceği açıklanmıştır (Bradley, 2006, s. 120). Fibonacci'nin Floransa Ulusal Kütüphanesi'ndeki *Liber Abaci* adlı eserinin bir sayfası, dizideki konumu Latin rakamları ve Romen rakamlarıyla ve Hint-Arap rakamlarıyla gösterilen değeriyle Fibonacci dizisini göstermektedir (Resim 1).

Resim 1. Fibonacci'nin Floransa Kütüphanesi'ndeki Liber Abaci adlı eseri

Bu hızlı problem çözme teknikleri ile liman şehirlerinde ticaret yapan tüccarların ellerindeki farklı paraları, bir para biriminden diğerine nasıl çevireceklerini ve tüccarlara kârlarını nasıl hesaplayacaklarını anlattı.

Malları ölçmek için kullanılan ağırlıklar da standartlaştırılmamıştı, dolayısıyla bunlar arasında nasıl dönüşüm yapılacağını bilmek gerekiyordu (Henderson, 2007, s. 3-4). Son dört bölümde cebir, geometri ve sayılar teorisi gibi matematiğin farklı dallarından teknikler ele alınmış ve bu tekniklerin kullanılabileceği bir dizi problem ve bulmaca sunulmuştur (Bradley, 2006, s. 120). Bu kitapta Fibonacci, 16. yüzyıla kadar yaygın olarak kullanılmamış olmalarına rağmen, bugün cebir çalışmalarının temelini oluşturan iki yeni fikir ortaya atmıştır. Bazı problemlerde değişkenleri temsil etmek için tek harfler kullanmış ve bir problemde negatif sayılardan yararlanmıştır (Bradley, 2006, s. 122).

Fibonacci'nin yeni numaralandırma sistemine ilişkin kapsamlı ve ayrıntılı açıklamaları çok yankı uyandırmıştır. Avrupalıları; Roma rakam sistemini yerine daha verimli Hindu-Arap sistemi lehine bir kenara bırakmaya ikna etmeye katkıda bulunmuştur. Avrupa büyük bir entelektüel, finansal ve ticari değişim dönemine giriyordu ve *Liber Abaci* yayınlandığında çok tercih edilmiştir (Devlin, 2011, s. 85-86).

Fibonacci, Avrupa matematiğine yaptığı önemli katkılara rağmen daha çok *Liber Abaci*'de yer alan bir problemin çözümünü sağlayan tek bir sayı dizisiyle hatırlanmaktadır. Fibonacci kitaptaki çoğu problem gibi bu problemi de kendisi icat etmemişti, ancak bu probleme getirdiği çözüm onu matematik dünyasında sonsuza dek ölümsüzleştirdi (Devlin, 2011, s. 143).

Tavşanların yenilenmesi ile ilgili olan problemde, ilk ay sadece bir çift tavşan olması durumunda bir yıl sonraki tavşan sayısı hesaplanmıştır. Problem, bir tavşan çiftinin olgunlaşmasının bir ay sürdüğünü ve çiftin takip eden her ay bir çift tavşan üreteceğini belirtmektedir. Fibonacci'nin çözümü, ilk ayda sadece bir çift olacağını; ikinci ayda bir yetişkin çift ve bir yavru çift olacağını; üçüncü ayda iki yetişkin çift ve bir yavru çift olacağını ve bu şekilde devam edeceğini belirtmiştir (Posamentier & Lehmann, 2007, s. 25-26). Her ay için toplam tavşan sayısı birbiri ardına sıralandığında, Fibonacci'nin en ünlü olduğu sayı dizisi ortaya çıkar:

1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377...

Bu sayı dizisi Fibonacci dizisi olarak bilinir ve birbirini izleyen her sayı, önceki iki sayının toplanmasıyla bulunur. Fibonacci dizisi bilinen en eski yinelemeli sayı dizisidir, yani her bir ardışık sayının yalnızca önceki sayılar üzerinde işlem yapılarak bulunabildiği bir dizidir. İlginç bir şekilde, Fibonacci bu dizinin yinelemeli doğası hakkında yorum yapmamaktadır. Sayılar arasındaki ilişki dört yüz yıl sonrasına kadar yayınlarda anlatılmamıştır. *Liber Abaci*'nin yayınlandığı dönemde bu sayılara özel bir dikkat gösterilmemiştir. Matematikçiler 1800'lerin ortalarından daha sonra Fibonacci sayıları olarak bilinen olan bu sayılarla ilgilenmeye başlamışlardır (Posamentier & Lehmann, 2007, s. 26-27).

Fibonacci dizisini oluşturan sayıların daha yakından incelenmesi, her türlü büyüleyici örüntüyü ve matematiksel özelliği gün ışığına çıkarır. Fibonacci'nin kendisi kitabında bu örüntülerden bahsetmez, ancak aşağıdaki örüntüler, dizideki sayıların yıllar süren incelemeleri sonucunda gün ışığına çıkarılmıştır.

Herhangi iki ardışık Fibonacci sayısı, aralarında asaldır ve birbirleriyle ortak çarpanları yoktur (Garland, 1987, s. 67). Örneğin, dizinin " 8, 13, 21, 34, 55 " terimlerine bakıldığında bu ifadenin doğruluğu gözlemlenebilir:

8 = 2.2.2
13 = 1.13
21 = 3.7
34 = 2.17
55 = 5.11

Herhangi on ardışık Fibonacci sayısının toplamı, her zaman on bire bölünebilen bir sayı ile sonuçlanacaktır (Posamentier & Lehmann, 2007, s. 33).

$$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 = 143$$

$$\frac{143}{11} = 13$$

89 + 144 + 233 + 377 + 610 + 987 + 1,597 + 2,584 + 4,181 + 6,675 = 17,567

$$\frac{17{,}56}{11} = = 1{,}597$$

Geleneği izleyerek, Fn , n'inci Fibonacci sayısını temsil etmek için kullanılacaktır. Sıra:

n	**Fn**
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55
11	89
12	144
13	233
14	377
15	610

Her üçüncü Fibonacci sayısı ikiye bölünebilir veya F_3. Her dördüncü Fibonacci sayısı üçe bölünebilir veya F_4. Her beşinci Fibonacci sayısı beşe bölünebilir veya F_5. Her altıncı Fibonacci sayısı sekize veya F_6 'ye bölünebilir ve bu örüntü devam eder. Genel olarak, her n'inci Fibonacci sayısı Fibonacci dizisindeki n'inci sayıya bölünebilir veya F_{mn} F_n ile bölünebilir (Garland, 1987, s. 69).

Bileşik sayı konumundaki Fibonacci sayıları, dördüncü Fibonacci sayısı hariç, her zaman bileşik sayılardır. Diğer bir deyişle, eğer n asal değilse, n'inci Fibonacci sayısı da asal olmayacaktır (Posamentier & Lehmann, 2007, s. 35).

$$F_6 = 8$$
$$F_9 = 34$$
$$F_{16} = 987$$

On birinci Fibonacci sayısının karşılığı olan 89 sayısı, Fibonacci dizisinin her Fibonacci sayısının bir basamak katkıda bulunacağı şekilde toplanmasıyla bulunabilir. tekrar eden ondalık sayıdır, $\frac{1}{89}$ (Garland, 1987, s. 69).

Herhangi bir Fibonacci sayısını iki ile çarpmak ve dizideki bir sonraki sayıyı çıkarmak, cevabın orijinal sayıdan iki basamak önceki sayı olmasıyla sonuçlanacaktır. (Garland, 1987, s. 70).

0.0112358
13
21
34
55
89
144
233
377
610
987

$\frac{1}{89}$= 0.01123595505617787

Herhangi bir Fibonacci sayısını iki ile çarpmak ve dizideki bir sonraki sayıyı çıkarmak, cevabın orijinal sayıdan iki basamak önceki sayı olmasıyla sonuçlanacaktır. (Garland, 1987, s. 70).

$$\ldots 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 \ldots$$
$$2 .F_6 - F_7 = (2 . 8) - 13 = 16 - 13 = 3 = F_4$$
$$2 . F_{11} - F_{12} = (2 - 89) - 144 = 178 - 144 = 34 = F_9$$
$$2 . Fn - Fn+1 = Fn-2$$

İlk tek konumlu sayı olan F_1 ile başlayarak ardışık tek konumlu Fibonacci sayılarını toplamak, toplamdaki son terimden sonra dizideki bir sonraki Fibonacci sayısı olan bir sayı ile sonuçlanacaktır (Posamentier & Lehmann, 2007, s. 38-39).

$$F_1 + F_3 = 1 + 2 = 3 = F_4$$
$$F_1 + F_3 + F_5 = 1 + 2 + 5 = 8 = F_6$$
$$F_1 + F_3 + F_5 + F_7 = 1 + 2 + 5 + 13 = 21 = F_8$$

F_2 ile başlayan ardışık, çift konumlu Fibonacci sayıları toplandığında da benzer bir model ortaya çıkar, ancak bu sefer sonuç, toplamdaki son çift sayıyı takip eden Fibonacci sayısından bir eksik olan bir sayıdır (Posamentier & Lehmann, 2007, s. 37-38).

$$F_2 + F_4 = 1 + 3 = 4 = F_5 - 1$$

$$F_2 + F_4 + F_6 = 1 + 3 + 8 = 12 = F_7 - 1$$

$$F_2 + F_4 + F_6 + F_8 = 1 + 3 + 8 + 21 = 33 = F_9 - 1$$

Herhangi bir Fibonacci sayısının kendisinden iki basamak sonraki sayı ile çarpımı, ikisi arasındaki Fibonacci sayısının karesinden bir fazla veya bir eksik olacaktır. Karesi alınacak sayı çift konumlu bir Fibonacci sayısı olduğunda, bir eklenir ve tek konumlu olduğunda, bir çıkarılır (Posamentier ve Lehmann, 2007, s. 44- 45).

... 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89 ...

$F_4 . F_6 = 3 .8 = 24$ ve $F_5^2 = 5^2 = 25$

$F_9 . F_{11} = 34 .89 = 3{,}026$ ve $F_{10}^2 = 55^2 = 3{,}025$

$F_{n-1} . F_{n+1} = F_n \pm 1$

Bir Fibonacci sayısının karesi, bir Fibonacci sayısının karesinden çıkarıldığında sayısından iki basamak sonra gelirse, sonuç bir Fibonacci sayısıdır.

$F_6^2 - F_4^2 = 8^2 - 3^2 = 55 = F_{10}$

$F_7^2 - F_5^2 = 13^2 - 5^2 = 144 = F_{12}$

$F_{15}^2 - F_{13}^2 = 610^2 - 233^2 = 317{,}811 = F_{28}$

$Fn^2 \quad Fn\text{-}2^2 = F_{2n-2}$

Her bir örnekteki alt simgeler incelendiğinde, bir örüntü ortaya çıkmaya başlar. İlk iki alt simgenin toplamı her denklemdeki üçüncü alt simgeye eşittir (Posamentier & Lehmann, 2007, s. 42).

Benzer şekilde, iki ardışık Fibonacci sayısının kareleri toplandığında, toplam da bir Fibonacci sayısıdır.

$F_3^2 + F_4^2 = 2^2 + 3^2 = 13 = F_7$

$F_6^2 + F_7^2 = 8^2 + 13^2 = 233 = F_{13}$

$F_{13}^2 + F_{14}^2 = 233^2 + 377^2 = 196{,}418 = F_{27}$

$Fn^2 \quad F_{n+1}^2 = F_{2n+1}$

Bu durumda da, her bir denklemdeki alt simgeler toplama işlemi ile ilişkilidir. Önceki örnekte olduğu gibi, ilk iki alt simgenin toplamı üçüncü alt simgeye eşittir (Posamentier & Lehmann, 2007, s. 43).

Herhangi iki ardışık Fibonacci sayısının karesi alınıp toplanırsa, sonuç bir Fibonacci sayısı olur ve bu da bir dizi alternatif Fibonacci sayısı oluşturur (Garland, 1987, s. 72).

$1^2 = 1$
$+ \quad = 2$
$1^2 = 1$
$+ \quad = 5$
$2^2 = 4$
$+ \quad = 13$
$3^2 = 9$

Fibonacci dizisindeki herhangi dört ardışık sayı düşünüldüğünde, ortadaki iki sayının karelerinin farkı, dıştaki iki sayının çarpımına eşittir (Garland, 1987, s. 74).

... 5, 8, 13, 21 ...

$F_7^2 - F_6^2 = 13^2 - 8^2 = 105 = 5.21 = F_5 . F_8$

$F_{n+1}^2 - F_n^2 = F_{n-1} . F_{n+2}$

F_1 ile başlayan dizideki ardışık terimlerin kareleri, ardışık iki Fibonacci sayısının çarpımı olarak yazılabilecek bir sayıya toplanır. Spesifik olarak, toplam, karesi alınan son sayı ile hemen ardından gelen Fibonacci sayısının çarpımına eşittir.

12 + 12 = 1 .2
12 + 12 + 22 = 2. 3
12 + 12 + 22 + 32 = 3. 5
12 + 12 + 22 + 32 + 52 = 5.8
12 + 12 + 22 + 32 + 52 + 82 = 8 .13

Bu, Fibonacci sayılarının karelerinin toplamını bulmak için kolay bir yol sağlar. Toplam, basitçe, toplamdaki son kareli sayı ile Fibonacci dizisinde ondan sonra gelen sayının çarpımıdır (Posamentier & Lehmann, 2007, s. 40-41).

$$\sum_{i=1}^{n} Fi2 = FnFn+1$$

Herhangi üç ardışık Fibonacci sayısı için, iki büyük sayının küplerinin toplamından en küçüğünün küpü çıkarıldığında başka bir Fibonacci sayısı elde edilir (Garland, 1987, s. 67-77).

$$\ldots 1, 2, 3, 5, 8, 13 \ldots$$
$$F_3^3 + F_4^3 - F_2^3 = 2^3 + 3^3 - 1^3 = 8 + 27 - 1 = 34 = F_9$$
$$F_6^3 + F_7^3 - F_5^3 = 8^3 + 13^3 - 5^3 = 512 + 2197 - 125 = 2{,}584 = F_{18}$$
$$Fn+13 + Fn+23 - Fn3 = F3n+3$$

Herhangi bir sayıda ardışık Fibonacci sayısının toplanması, son eklenen sayının iki basamak ötesindeki Fibonacci sayısından bir eksik bir sayı ile sonuçlanacaktır.

$$\ldots 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \ldots$$
$$F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 = 12 = 13 - 1 = F_7 - 1$$

Bu, herhangi bir sayıda Fibonacci sayısının toplamını bulmanın basit bir yolu için genel bir formül verir (Posamentier & Lehmann, 2007, s. 36-37).

$$\sum_{i=1}^{n} F_i = F_{n+2} - 1$$

Bir Fibonacci sayısının değerini bulmak, dizideki konumu göz önüne alındığında, özellikle de dizide daha sonraki bir yerleşime sahipse, çok zaman alıcı ve sıkıcı olabilir. Beşinci Fibonacci sayısını bulmak zor değildir. Ellinciyi bulmak ise çok daha zahmetlidir, çünkü bu işlem önceki kırk dokuz terimi bulmayı ve toplamayı gerektirir.

1843 yılında Fransız matematikçi Jacques-Philippe-Marie Binet, dizideki önceki sayılardan herhangi birini bulmak zorunda kalmadan herhangi bir Fibonacci sayısını bulabilen önemli bir formül keşfetti. F_n , n. Fibonacci sayısı olmak üzere, bu formül $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ altın oran olarak adlandırılan sayı ve tersinden oluşmaktadır. (Posamentier & Lehmann, 2007, s. 293-296).

$$Fn = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\right] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

Bu önemli formül aşağıdaki şekilde ortaya çıkmaktadır:

Fibonacci dizisi, $n \geq 2$ için $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ şeklinde kurala sahiptir. $F_n = r^n$ olarak alınırsa bu kural $r^n = r^{n-1} + r^{n-2}$ şekline dönüşür. Bu denklemden $r^2 - r - 1 = 0$ ikinci dereceden denkleme ulaşılır. Bu denklem çözüldüğünde $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ sayıları bulunur. Ayrıca fibonacci dizisi homojen doğrusal olduğundan $F_n = Ar_1^n + Br_2^n$ şeklinde çözüme sahiptir.

$$F_n = Ar_1^n + Br_2^n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

denkleminde $n = 0$ alınırsa

$$F_0 = A + B = 0$$

ve $n = 1$ alınırsa

$$F_1 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

İfadeleri bulunur. Bu son iki denklemden

$A = -B$ ve $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

bulunur ki o zaman F_n , n. Fibonacci sayısı

$$Fn = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikte $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ alınırsa ve eşlenikle genişletilirse

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} . \frac{1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} = \frac{-2}{1+\sqrt{5}} = \frac{-2}{2\varphi} = \frac{-1}{\varphi}$$

bulunur. Bu denklemde yukarıda verilen

$$Fn = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\varphi^n - \left(-\frac{1}{\varphi}\right)^n\right]$$

eşitliğine denktir. (Rosen, 2012, pp. 514-517).

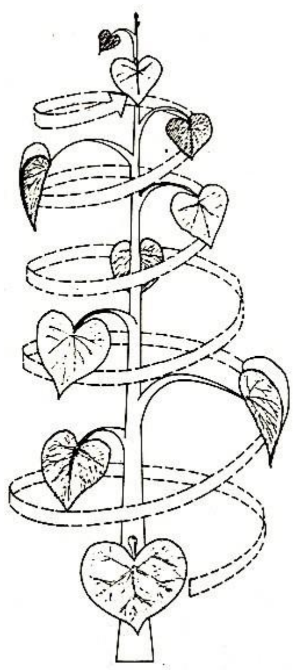
Fibonacci dizisi ne kadar çok incelenirse, o kadar büyüleyici ve ilgi çekici desenler ortaya çıkmaya başlar. Sayılar üzerinde çeşitli matematiksel işlemler yapıldıkça, sayılar arasındaki her türlü ilişki gün ışığına çıkar. Bu sayı dizisinin yüzyıllar boyunca matematik dünyasını büyülemesinin birçok nedeninden biri de budur.

4. TABİAATTAKİ FİBONACCİ DİZİSİ

Rönesans döneminde Fibonacci'nin yaşamından birkaç yüz yıl sonra, insanların kendilerini çevreleyen doğal dünyaya daha analitik bir dikkat göstermeye başladığı ortaya çıktı. Çeşitli bitkilerin, hayvanların ve insanların yapılarını ve biçimlerini inceledikçe, Fibonacci sayı kalıplarının yaratılış boyunca ölçümlerde ortaya çıktığını fark ettiler.

Bitkiler.

Fibonacci sayılarının sürekli olarak ortaya çıktığı bir yer, filotaksi olarak bilinen bir çalışma alanı olan bitkilerdeki yaprak dizilimidir. Yapraklar bir bitki gövdesinde yukarı doğru çıkarken spiral bir düzen izlerler. Bir yapraktan başlayarak, x ilk yaprağın hemen üzerindeki bir yaprağa ulaşmadan önce spiralin dönüş sayısı olsun. İlk yaprak ile son yaprak arasında spiral boyunca karşılaşılan yaprak sayısı y olsun, ilk yaprak sayılmaz. Bu x/y oranı bitkinin ıraksaması olarak bilinir (Devlin, 2011, s. 146) (Resim 2).

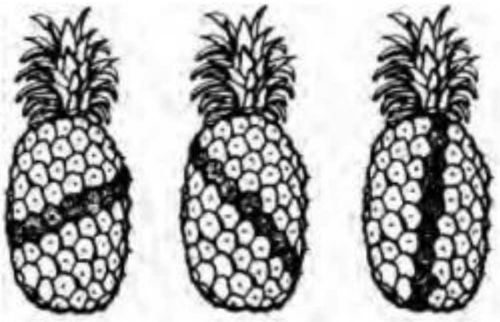


Resim 2. Bitli sarmalı (Askipedia).

Bu filotaktik oranda pay ve payda genellikle Fibonacci sayılarıdır. Örneğin, yapraklar kavak, söğüt ve armut ağaçları için bir devrin yaklaşık 3/8'inden, kayın ve fındık için 1/3'ünden, meşe, kiraz ve elma için 2/5'inden, karaağaç ve ıhlamur için 1/2'sinden ve badem için 5/13'ünden sonra oluşur. Diğer filotaktik oranlar arasında 3/5, 5/13 ve 8/13 bulunmaktadır (Adam, 2003, s. 217). Ayrıca, yaprakların veya taç yaprakların toplam sayısı genellikle bir Fibonacci sayısıdır. Birkaç örnek vermek gerekirse, çuha çiçeği, larkspur ve düğünçiçeklerinin beş, delphiniumların sekiz, kadife çiçeğinin on üç, aster ve hindibanın yirmi bir ve çeşitli papatya türlerinin on üç, yirmi bir, otuz dört, elli beş veya seksen dokuz yaprağı olabilir (Devlin, 2011, s. 145). Fibonacci sayıları çoğu bitkinin yaprak ya da taç yaprak diziliminde mevcuttur. Bu sayıların genellikle bu tür düzenlemelerde bulunmasının nedeninin, alınan ışık miktarını veya bitkideki her bir yaprak veya taç yaprağı için ayrılan alanı en üst düzeye çıkarmak olabileceği tahmin edilmektedir. Yukarı doğru büyüyen bir sap, düzenli açısal aralıklarla dallanan ve sapa doğru spiral çizen yapraklar üretecektir. Eğer bir gövde üzerindeki yaprakların hepsi 360°'nin katları olan açısal aralıklarla büyürse, o zaman biri diğerinin hemen üzerinde büyüyor olacaktır. Bu durumda üstteki birkaç yaprak alttaki yaprakların önünü kapatacak ve onların daha fazla güneş ışığı ve nem almasını engelleyecektir (Adam, 2003, s. 217).

Fibonacci oranları birçok bitkinin spiral desenlerinde de görülür. Çam kozalaklarının üzerindeki spiral pullar bulunur. Dikkatli bir inceleme, aslında iki set spiral olduğunu gösterecektir. Bir set soldan sağa, diğer set ise sağdan sola doğru ilerler. Bu spiral kümelerinden biri kozalağın kenarından dik bir şekilde yükselirken, diğeri çok daha kademeli olarak yükselir. Kozalağın kenarındaki dik ve kademeli spirallerin sayısı neredeyse her zaman Fibonacci sayılarıdır ve genellikle Fibonacci dizisinde ardışıktırlar. Örneğin, bazı kozalaklarda üç kademeli ve beş dik spiral bulunurken, diğerlerinde sekiz kademeli ve on üç dik spiral bulunur. Enginarların ve diğer çeşitli çiçek tomurcuklarının dış taç yapraklarında da benzer türde spiraller görülür.

Çam kozalaklarında olduğu gibi, bir yönde dik olarak ilerleyen bir spiral kümesi ve diğer yönde kademeli olarak ilerleyen başka bir spiral kümesi vardır ve her kümedeki spirallerin sayısı bir Fibonacci sayısıdır (Garland, 1987, s. 9-10). Aynı durum ananaslar için de geçerlidir. Bir ananas, brakts olarak bilinen altıgen şekilli pullarla kaplıdır. Bu brakteler, her biri altıgenin karşılıklı kenarlarından geçen üç farklı yönde spiraller oluşturur. Beş spiral bir yönde kademeli olarak yükselir, sekiz spiral ikinci yönde orta hızda yükselir ve on üç spiral üçüncü yönde dik bir şekilde yükselir ve üç farklı küme için üç ardışık Fibonacci sayısı verir (Posamentier & Lehmann, 2007, s. 63-64) (Resim 3).



Resim 3. Ananaslar üzerindeki spiraller (Livio, 2002, s. 111)

Ayrıca, palmiye ağaçlarının gövdelerindeki yaprak sapları da spiraller oluşturur ve yaprak sapı spirallerinin sayısı neredeyse her zaman bir Fibonacci sayısıdır. Palmiye ağacının türüne bağlı olarak bir, iki, üç, beş, sekiz, on üç ya da yirmi bir spiral bulunabilir (Posamentier & Lehmann, 2007, s. 73).

Benzer bir Fibonacci spiral eğilimi, çiçeklerin merkezleri, çeşitli kaktüs türlerinin dikenleri ve bazı sulu meyvelerin yaprakları incelendiğinde de ortaya çıkar. Bu durumda, saat yönünde ilerleyen bir spiral seti ve saat yönünün tersine ilerleyen ikinci bir set bulunabilir. Saat yönünde giden spirallerin sayısı ve saat yönünün tersine giden spirallerin sayısı ardışık Fibonacci sayılarıdır.

Bu en açık şekilde ayçiçeğinde görülür. Çiçek başının merkezindeki tohumlar saat yönünde ve saat yönünün tersine spiral çizer. Spiral kümelerinin sayısı ayçiçeğinin yaşına ve gelişimine bağlı olsa da, bunlar her zaman Fibonacci sayılarıdır. Bu iki sayı 13 ve 21'den 34 ve 55'e, 89 ve 144'e kadar değişebilir (Posamentier & Lehmann, 2007, s. 67-69).

Sapma açısının 137,5°'den az olması durumunda, ayçiçeğinin tohum başlarında boşluklar oluşacağı ve spirallerin yalnızca bir yönünün belirgin olacağı keşfedilmiştir. Benzer şekilde, sapma açısı 137,5°'den büyük olsaydı, tohum kafasında yine boşluklar belirecek ve bu kez spiraller yalnızca diğer yöne doğru sarılırken görülebilecekti. Sadece altın açıda tohum üzerindeki tohumların başın boşluksuz olarak paketlenmesi ve spirallerin her iki yönünün de ortaya çıkmasıdır (Stewart, 1998, s. 126-127).

Tomurcuklanan bir güle yukarıdan bakıldığında, taç yapraklarının spiral şeklinde açıldığını görürüz. Birbirini izleyen iki taç yaprağı arasındaki açılar ölçüldüğünde, açıların altın açı olan 137,5° civarında olduğu görülür (Hemenway, 2005, s. 135).

Yüzyıllar boyunca bilim insanları ve matematikçiler, Fibonacci sayılarının bitki büyüme ve gelişmesindeki yaygın görünümünün ardındaki nedenleri keşfetmeye çalışmışlardır. 1992 yılında, iki Fransız matematikçi Yves Couder ve Adrien Douady, Fibonacci sayılarının ortaya çıkmasının nedenini bitki gelişimi üzerindeki doğal kısıtlamalara dayandırmıştır. Çalışmaları, "bitkilerdeki görünür matematiksel örüntülerin gerçekten de fiziksel dünyanın evrensel yasalarından kaynaklandığını gösterdi. Bunlar yalnızca evrim tarafından güçlendirilmiş genetik kazalar değildir" (Stewart, 1998, s. 123).

Çam kozalaklarında, çiçek tohumu başlarında ve ananaslarda bulunan altın spiral, doğada sayısız başka yerde de bulunabilir. Büyüyen bir eğrelti otunun kıvrımı logaritmik bir spiral modelini takip eder, sıkıca kıvrılmış olarak başlar, ancak büyüdükçe gevşer. Aynı spiral, kıyıya çarpmadan önce kendi üzerine doğru kıvrılan okyanus dalgalarında da izlenebilir. Bir galaksinin içindeki spiral form da, bir fırtınanın spiral şekli gibi altın bir spirale uyar (Garland, 1987, s. 30-31).

HAYVANLAR
Fibonacci sayıları hayvanlar aleminde de kendini gösterir. İlk olarak tavşanların üremesiyle ilgili bir problemde ortaya çıkan bu sayı dizisi, diğer canlıların üremesiyle de karşımıza çıkmaktadır. Bu sayıları, erkek arının soy ağacının incelenmesiyle keşfedilebilir. Bir arı kovanında yaşayan üç tür arı vardır: yumurta üreten kraliçe arı; hiçbir iş yapmayan erkek arılar ve tüm işi yapan dişi arılar (Posamentier & Lehmann, 2007, s. 59). Dişi arılar döllenmiş yumurtalardan gelişir, yani hem anneleri hem de babaları vardır. Erkek arılar ise döllenmemiş yumurtalardan gelişir, yani sadece anneleri vardır ama babaları yoktur. Bununla birlikte, her dişi arının bir babası olduğu için büyükbabaları vardır (Garland, 1987, s. 13). Yani bir erkek arının bir annesi, iki büyükanne ve büyükbabası, üç büyük büyükanne ve büyükbabası, beş büyük büyük büyükanne ve büyükbabası ve sekiz büyük büyük büyükanne ve büyükbabası vardır. Her bir önceki nesildeki arı sayısı bir Fibonacci sayısıdır (Hemenway, 2005, s. 135).
Fibonacci dizisinin hayvanlar alemindeki en ilgi çekici görünümlerinden biri, hayvanların büyümesini gösteren spiraldir. Altın spiralin en iyi örneklerinden biri, odacıklı nautilus kabuğunda bulunabilir. Nautilus büyüdükçe, içinde yaşadığı odacık da aynı şekli koruyarak büyümek zorundadır. Kabuğun boyutu arttıkça, birbirini izleyen her bölmenin yarıçapı da artar, ancak her yarıçap ile kabuğun dış duvarı arasındaki kesişme açıları aynı kalır. Bu, benzer şekilde şekillendirilmiş, ancak boyutları sırayla artan odacıklarla sonuçlanır ve böylece Fibonacci oranlarını sergileyen eşkenar bir spiral oluşturur. Bu spiral, papağan gagaları, fil dişleri, denizatı kuyruğu ve büyük boynuzlu koyun boynuzları gibi hayvanlar aleminin birçok başka yerinde de bulunabilir. Spiralin diğer tezahürleri arasında örümcek ağları, kedi pençeleri, birçok deniz kabuğunun büyüme şekilleri ve bir böceğin ışık kaynağına yaklaşırken izlediği yol sayılabilir. Tüm bu spiraller altın spiralin temel özelliklerine sahiptir, çünkü hepsi Aynı şekli korurken boyutları artar ve çoğu spirallerinde Fibonacci oranlarını sergiler (Garland, 1987, s. 16, 31).

Fibonacci sayıları ve altın oran da doğada beşgenler tarafından sergilenen bir rol oynamaktadır. Bir beşgenin bir kenarının ölçüsü bir Fibonacci sayısı ise ve bir iç köşegenin ölçüsü dizideki bir sonraki Fibonacci sayısı ise, o zaman beşgen düzenli bir beşgendir. Sayılar ne kadar yüksek olursa, aralarındaki oran altın orana o kadar yakın olur. Ayrıca, beşgenin iç köşegenlerinin kesiştiği yerlerde, birbirlerini iki ardışık Fibonacci sayısına bölerler. Örneğin, kenar uzunlukları 89 ve köşegenleri 144 olan bir beşgende, kesişen iki köşegen birbirini 55 ve 89'luk parçalara böler. Bu beşgenler doğada birçok yerde görülür ve genellikle yıldız benzeri bir şekil olarak ortaya çıkar. Bir kum dolarının merkez tasarımı, birçok denizyıldızının şekli, bir elmanın enine kesitindeki tohum yerleşimi ve birçok çiçeğin biçimi gibi beşgen şeklini taşır (Garland, 1987, s. 17- 18).

Bu örnekler Fibonacci sayılarının doğada bulunduğu örneklerden sadece birkaçını göstermektedir. Fibonacci sayılarının ve altın oranın tezahürleri görünüşte sonsuzdur. Birisi bu oluşumları aramaya başladığında, aniden her yerde bulunabilir. Kar taneleri altın orana göre inşa edilmiştir. Çam iğneleri genellikle 2, 3 veya 5'li gruplar halinde büyür. Çoğu bitki kabuğundaki segmentlerin sayısı bir Fibonacci sayısıdır (Garland, 1987, s. 18). Bu belirtiler tamamen şans ya da tesadüf olamayacak kadar sık görülür. Bunun yerine, düzen ve hassasiyetle oluşturulmuş bir dünyanın matematiksel doğasını gösterirler.

4. SONUÇ
Pisa'lı Leonardo'nun hayatı hakkında çok az şey bilinmesine rağmen, çalışmaları dünya üzerinde silinmez bir etki bırakmıştır. En çok bilinen keşfi kendi adını taşıyan sayı dizisi

yaşamı boyunca bu kadar ünlü olmasını sağlayamamıştır. Gerçekten de yüzlerce boyunca insanların hiç ilgisini çekmedi.

Bu eşsiz ve büyüleyici sayı dizisi, dizideki sayılara çeşitli matematiksel hesaplamalar uygulanarak keşfedilebilecek her türlü ilgi çekici özelliğe sahiptir. Fibonacci sayıları yaşadığımız dünyanın her yerinde mevcuttur ve bunlardan oluşturulabilecek örüntüler zihni hem hayrete düşürür hem de şaşırtır. Fibonacci sayılarının kendi başlarına incelenmesi güzeldir, ancak daha yüksek bir güzellikleri de vardır. Bu sayılar, içinde yaşadığımız dünyanın inanılmaz düzenini ve matematiksel karmaşıklığını vurgulamakta ve bunların hepsi Yaratıcı'ya işaret etmektedir. Böylesine karmaşık desenler sadece tesadüf eseri yaratılmış olamaz, aksine ancak her şeyi yaratan Allah'ın bir düzeni ve eseri olabilir.

KAYNAKÇA

Adam, J. A. (2003). *Mathematics in nature: Modeling patterns in the natural world*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Akipedia. [Untitled illustration of phyllotaxis]. Retrieved from http://www.askipedia.com/6-fascinating-appearances-of-the-fibonacci-numbers-in-nature/

Atalay, B. (2006). *Math and the Mona Lisa: The art and science of Leonardo da Vinci*. New York, NY: Smithsonian Books.

Bradley, M. J. (2006). *The birth of mathematics: Ancient times to 1300*. New York, NY: Chelsea House.

Devlin, K. (2011). *The man of numbers: Fibonacci's arithmetic revolution*. New York, NY: Walker.

Garland, T. H. (1987). *Fascinating Fibonaccis: Mystery and magic in numbers*. Palo Alto, CA: Dale Seymour.

Grigas, A. (2013) *The Fibonacci Sequence Its History, Significance, and Manifestations in Nature,* Acceptance of Senior Honors Thesis, Liberty University.

Hemenway, P. (2005). *Divine proportion: Phi in art, nature, and science*. New York, NY: Sterling Publishing.

Henderson, H. (2007). *Mathematics: Powerful patterns in nature and society*. New York, NY: Chelsea House.

Livio, Mario. (2002). *The golden ratio: The story of phi, the world's most astonishing number*. New York, NY: Broadway Books.

Posamentier, A. S., & Lehmann, I. (2007). *The fabulous Fibonacci numbers*. Amherst, NY: Prometheus Books.

Posamentier, A. S., & Lehmann, I. (2012). *The glorious golden ratio*. Amherst, NY: Prometheus Books.

Rosen, K. H. (2012). *Discrete mathematics and its applications*. New York, NY: McGraw-Hill.

Stewart, I. (1998). *Life's other secret: The new mathematics of the living world* (7th ed.) New York, NY: John Wiley & Sons.